

Problem Set 11&12: 基本计数技术 (容斥原理、排列组合与鸽笼原理)

(提交截止时间: 4 月 8 日 10:00)

Problem 1

- a) 证明: 任意给出四个整数, 则其中至少有两个整数, 它们除以 3 的余数相同 (即模 3 同余).
- b) 证明: 若 a_1, a_2, \dots, a_{p+1} 是整数, 则其中至少有两个数模 p 同余.

Problem 2

某班有学生 60 人, 其中有 38 人学习 PASCAL 语言, 有 16 人学习 C 语言, 有 21 人学习 COBOL 语言; 有 3 个人这三种语言都学习, 有 2 个人这三种语言都不学习, 问仅学习两门语言的学生数是多少?

Problem 3

- 1. a) 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ 的非负整数解的个数有多少?
- 2. b) 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ 的正整数解的个数有多少?

Problem 4

一个圆盘分成 36 个连续扇区, 其编号为 $1, 2, 3, \dots, 36$.

- a) 证明有 4 个连续扇区, 其编号之和大于 74.
- b) 证明有 5 个连续扇区, 其编号之和大于 94.

Problem 5

长度为 $n (n > 5)$ 且以 123 开始或以 321 结尾的三进制串有多少个?

Problem 6

长度为 12 且不包含 “11” 子串的二进制串有多少个？

Problem 7

有 6 个集合, 如果知道其中任 3 个集合都是不相交的, 根据容斥原理写出关于这 6 个集合并集元素个数的显式公式.

Problem 8

设 p 和 q 都是素数, $n = p * q$. 使用容斥原理计算不超过 n 并与 n 互素的正整数的个数.

Problem 9

在这个问题里, 我们将要计数 xy 平面上在原点和 (m, n) 点之间的路径数. 这些路径由一系列的步构成, 其中每一步是向右或者向上移动一个单位 (不允许向左或向下移动).

- a) 证明上述每条这种类型的路径可以用由 m 个 0 和 n 个 1 组成的比特串表示.
- b) 所求路径共有多少条.

Problem 10

考虑一个 $N \times N$ 网格, 其中的每一个单元格可以取值 $+1$ 或 -1 . 我们称这种网格为二进制网格 (*Binary grid*). 任何行的行乘积 (*row product*) 都被定义为该单行中所有元素的乘积. 同样, 一列的列乘积 (*column product*) 被定义为该单个列中所有元素的乘积. 如果 N 行的行乘积中, 有且只有一个结果为 -1 , 而 N 列的列乘积中, 有且只有一个结果为 -1 , 则该 $N \times N$ 的元网格称为魔术网格. 换句话说, 魔术网格要求其他 $N - 1$ 个行乘积全部为 $+1$, 其他 $N - 1$ 个列乘积应也全部为 $+1$. 试计算所有 $N \times N$ 的网格中, 魔术网格的数量.

Problem 11

设 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 是 $x - y$ 平面上具有整数坐标的五个不同的点, 证明: 至少存在一对点的连线中点的坐标是整数.

Problem 12

【探索问题】利用 DeepSeek 等大语言模型平台启发思路, 并写出解答以下问题的完整过程 (建议使用 DeepSeek-R1-671B-BF16 专项引擎, 可使用 [南京大学校内 DeepSeek 服务](#)):

对定义在 m 元集合 A 和 n 元集合 B 上的满射函数 $f: A \rightarrow B$ 进行计数.